Unione Matematica Italiana
PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
Ministero dell'Istruzione,
dell'Università e della Ricerca
Scuola Normale Superiore

I Giochi di Archimede, Gara Biennio – 23 novembre 2016

Soluzione dei problemi (l'ordine si riferisce al testo T1)

Problema 1. *La risposta è* **(B)**.
Il numero 1000^{1000} coincide con $(10^3)^{1000} = 10^{3000}$, che si scrive come 1 seguito da 3000 zeri. Il numero totale delle cifre è quindi 3001.
(Problema proposto da P. Francini)

Problema 2. *La risposta è* **(E)**.
I numeri compresi tra 1 e 500 hanno doppio compreso tra 2 e 1000, e sono pertanto sicuramente scritti nel quaderno dopo l'intervento di Giovanna. I numeri superiori a 500 sono invece scritti solo se dispari: in totale si tratta di 250 numeri diversi. In totale quindi, dopo l'intervento di Giovanna, saranno scritti sul quaderno di Carlo $500 + 250 = 750$ numeri diversi.
(Problema proposto da P. Francini)

Problema 3. *La risposta è* **(C)**.
Se alla festa è presente almeno un furfante, è falso che gli altri presenti siano tutti furfanti, e quindi almeno uno dei presenti è cavaliere; questo accade, naturalmente, anche quando alla festa non sono presenti furfanti. D'altro canto, se alla festa è presente almeno un cavaliere, allora tutti gli altri presenti sono furfanti, e quindi i furfanti presenti sono esattamente 449.
(Problema proposto da P. Francini)

Problema 4. *La risposta è* **(B)**.
Il problema è equivalente a permutare i numeri $1, 2, 3, 4$ in modo che alla posizione i non compaia il numero i. Le nove sole possibilità per farlo sono:

$$2,1,4,3 \quad 2,3,4,1 \quad 2,4,1,3 \quad 3,1,4,2 \quad 3,4,1,2 \quad 3,4,2,1 \quad 4,1,2,3 \quad 4,3,1,2 \quad 4,3,2,1.$$

(Problema proposto da A. Dal Zotto)

Problema 5. *La risposta è* **(E)**.
Se Laura compra una camicetta e un maglione, ha $8 \cdot 5 = 40$ possibili scelte; se compra una camicetta e un pantalone, ha $8 \cdot 6 = 48$ scelte; se decide infine di comprare un magliore e un pantalone, ha $5 \cdot 6 = 30$ scelte a disposizione. Il numero dei possibili acquisti è quindi $40 + 48 + 30 = 118$.
(Problema proposto da P. Francini)

Problema 6. *La risposta è* **(A)**.
La squadra B ha subito 7 reti, e deve quindi aver giocato necessariamente con le squadre A e C, subendo 4 goal dalla squadra A e 3 dalla B, senza segnarne alcuno. Nella giornata in cui si è giocato l'incontro $A - B$ si è giocato anche $C - D$, mentre contemporaneamente a $B - C$ si è giocato $A - D$. È ora facile calcolare il risultato di ogni partita:

$$A - B : 4 - 0 \qquad C - D : 0 - 1 \qquad B - C : 0 - 3 \qquad D - A : 0 - 0$$

La classifica è quindi: 4 punti A e D, 3 punti C, 0 punti B, corrispondente alla risposta $4, 0, 3, 4$.
(Problema proposto da S. Pelizzola)

Problema 7. *La risposta è* **(C)**.
Le due persone con la maglia verde non possono essere nella stessa squadra; inoltre, i loro compagni di squadra devono avere maglie di colore diverso, altrimenti nella squadra rimanente finirebbero due persone con la maglia dello stesso colore. Un giocatore verde è quindi accoppiato ad un giocatore rosa, mentre l'altro giocatore verde è accoppiato ad un giocatore grigio. La composizione di queste due coppie decide anche la terza. Abbiamo due possibili scelte per il giocatore verde che gioca con un rosa; l'altro giocatore verde farà squadra con un grigio. A questo punto abbiamo due scelte su quale rosa giochi con il primo verde e quale grigio giochi col secondo verde. Tutte le scelte sono indipendenti, e abbiamo quindi in totale $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ modi di accoppiare i giocatori.
(Problema proposto da A. Bianchi)

Problema 8. *La risposta è* **(B)**.
La fattorizzazione in primi di 14000 è $2^4 \cdot 5^3 \cdot 7$. Se il prodotto tra a e b è 14000, saranno complessivamente presenti nelle fattorizzazioni di a e b quattro fattori 2, tre fattori 5 e un fattore 7. Il 7 non comparirà quindi nella fattorizzazione del massimo comun divisore, mentre il numero massimo di fattori 2 e 5 si otterrà disponendo due fattori 2 in ciascun numero, e dividendo i tre fattori 5 disponendone uno da una parte e due dall'altra. Il massimo valore del massimo comun divisore è quindi $2^2 \cdot 5 = 20$.
(Problema proposto da P. Francini)

Problema 9. *La risposta è* **(D)**.
Il numero complessivo di minuti giocati dai componenti di ciascuna squadra durante un incontro è $60 \cdot 5 = 300$. Questi 300 minuti vanno divisi equamente tra gli otto componenti della squadra. Ciascun giocatore sarà quindi in campo per $300/8 = 37,5$ minuti.
(Problema proposto da F. Caceffo)

Problema 10. *La risposta è* **(B)**.
Romeo ha un giorno libero ogni 10, e il primo giorno libero è un mercoledì. I suoi giorni liberi cadono, nell'ordine, di mercoledì, sabato, martedì, venerdì, lunedì, giovedì, domenica, per poi ricominciare da un mercoledì. Romeo e Giulietta si vedranno quindi una volta ogni 70 giorni, e la prima volta sarà tra 60 giorni. Essendovi in un anno 365 giorni, gli incontri avverranno tra $60, 130, 200, 270, 340$ giorni, e saranno quindi in totale 5.
(Problema proposto da P. Negrini)

Problema 11. *La risposta è* **(B)**.
Siano $\alpha = \widehat{DCO} = \widehat{ODC}$ e $\beta = \widehat{OPD} = \widehat{DOP}$. Per il teorema dell'angolo esterno applicato all'angolo in O del triangolo COP vale $\widehat{AOC} = \alpha + \beta$; e per lo stesso teorema applicato all'angolo in D del triangolo ODP vale $\alpha = 2\beta$. Dunque $\widehat{AOC} = 3\beta = 54°$.
(Problema proposto da F. Caceffo)

Problema 12. *La risposta è* **(C)**.
Tracciamo la diagonale BD: l'area del quadrilatero $ABCD$ è uguale alla somma delle aree dei triangoli ADB e DBC, mentre l'area del quadrilatero $BEDF$ è uguale alla somma delle aree dei triangoli EDB e DBF. D'altronde, il triangolo ADB ha area doppia del triangolo EDB (essendo unione dei triangoli ADE e EDB, che sono equiestesi, poiché hanno stessa altezza e basi di ugual lunghezza $AE = EB$). Analogamente il triangolo DBC ha area doppia del triangolo DBF (in quanto anche BDF e BFC sono equiestesi). L'area del quadrilatero $ABCD$ è dunque uguale al doppio dell'area di $BEDF$, cioè 48 cm^2.
(Problema proposto da S. Pelizzola)

Problema 13. *La risposta è* **(D)**.
Detto t il tempo trascorso, misurato in ore, la strada percorsa dal motorino è pari a $65t$ chilometri, e quella percorsa dalla bicicletta è $30t$ chilometri. La richiesta del problema equivale a trovare il minimo valore positivo di t per il quale $30t$ è multiplo di 90 e la differenza dei chilometri percorsi $65t - 30t = 35t$ è multipla di 360. Posto $30t = 90m$ e $35t = 360n$, con m, n interi positivi, si ottiene $t = 3m$ e quindi, sostituendo nella seconda equazione e semplificando, $7m = 24n$. Pertanto m è un multiplo di 24 e il tempo t sarà un multiplo di 72. È allora immediato verificare che tutti i multipli di 72 sono soluzioni, e dunque che il minimo valore positivo possibile per t è 72.
(Problema proposto da A. Bianchi)

Problema 14. *La risposta è* **(E)**.
Le quattro regioni in figura hanno tutte la stessa area. La loro unione è formata da un quadrato centrale di lato 4, e quindi di area 16, e da quattro semicerchi di raggio 2, ciascuna di area $(4\pi)/2 = 2\pi$. L'area complessiva è quindi $16 + 8\pi$, mentre ciascuna delle quattro regioni avrà area pari a $4 + 2\pi$.
(Problema proposto da R. Zanotto)

Problema 15. *La risposta è* **(C)**.
L'affermazione è equivalente a dire che x è multiplo di $1, 2, 3$ e 4, e quindi multiplo del loro minimo comune multiplo 12. Dobbiamo quindi contare gli interi positivi, minori di 2016 che siano multipli di 12. Poiché $2016/12 = 168$, ve ne saranno esattamente 167.
(Problema proposto da E. Tron)

Problema 16. *La risposta è* **(A)**.
Se la pulce effettua a mosse del primo tipo, b del secondo e c del terzo, lo spostamento complessivo nella direzione orizzontale sarà $2a - 2c$. Vogliamo muoverci dal punto $(0, 0)$ al punto $(0, 2016)$, e quindi $2a - 2c$ deve essere uguale a 0, da cui $a = c$. Il numero di mosse del primo e terzo tipo nel nostro percorso deve essere lo stesso. Lo spostamento complessivo nella direzione verticale sarà allora

$$4a + 5b - 9c = 4a - 5b - 9a = 5(b - a)$$

che è necessariamente multiplo di 5. Sarà quindi impossibile partire dal punto $(0, 0)$ e arrivare in $(0, 2016)$, poichélo spostamento verticale necessario è 2016, che non è multiplo di 5.
(Problema proposto da C. Casamento Tumeo)